

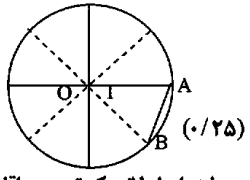
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۷ / ۱۶ / ۱۶		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره تابستانی (شهریور ماه) سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		
ردیف	سؤالات			
ردیف	نمره			
۱	۱	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ می باشد.		
۲	۱/۷۵	به روش استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $(1 + \sqrt{7})^n \geq 1 + \sqrt{7}n$		
۳	۰/۵	آیا حاصلضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است؟ چرا؟		
۴	۱	اگر n^3 مضرب ۵ باشد نشان دهید n نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)		
۵	۱/۲۵	۹ نقطه درون دایره‌ای به شعاع واحد انتخاب می کنیم ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌ای کمتر از واحد را دارند.		
۶	۱/۵	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C$		
۷	۱	x و y را چنان بیابید تا دو زوج مرتب $(125, 3^{2x+y})$ و $(5^{3y}, 64)$ مساوی باشند.		
۸	۱/۵	اگر $A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$ و $B = \{-1, 1, 2\}$ دو مجموعه باشند: الف) مجموعه‌های A^2 و B^2 را بصورت اعضا بنویسید. ب) مجموعه $A^2 - B^2$ را تشکیل دهید.		
۹	۱/۵	رابطه R در Z^2 به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^2 - y = z^2 - t$ الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(1, 2)]$ را تشکیل دهید.		
۱۰	۲	ارقام ۰، ۳، ۵، ۹ را در نظر بگیرید، مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه‌ی S که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد. ب) پیشامد A آنکه اعداد دو رقمی مضرب ۵ باشد. ج) پیشامد B آنکه اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد. د) پیشامد $A \cap B'$		
		«ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم»		

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۷ / ۶ / ۶		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره تابستانی (شهریور ماه) سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		
ردیف	سؤالات			
ردیف	نمره			
۱۱	خانواده‌ای ۶ فرزند دارد احتمال آنرا بیابید که دو فرزند خانواده پسر باشد.			
۱۲	در فضای نمونه ای $S = \{a, b, c, d\}$ داریم: $p\{a, d\} = \frac{5}{7}$ و $p\{a, b, c\} = \frac{17}{35}$ و c و b هم شانس هستند، احتمال هر یک را بیابید.			
۱۳	از میان ۵ پیچ و ۷ مهره که درون جعبه‌ای قرار دارند ۴ تای آنها را به تصادف خارج کرده ایم، احتمال آنرا بیابید که دو جفت پیچ و مهره داشته باشیم.			
۱۴	اگر A و B دو پیشامد باشند و داشته باشیم: $P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$ مطلوبست محاسبه $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$			
۱۵	نقطه‌ای به تصادف درون متوازی الاضلاعی به رئوس A و B و C و D انتخاب می کنیم، احتمال آنرا بیابید که داشته باشیم: $x < 1$ یا $x > 3/5$			
۱۶	برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید: $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$			
۲۰	جمع نمره «موفق باشید»			

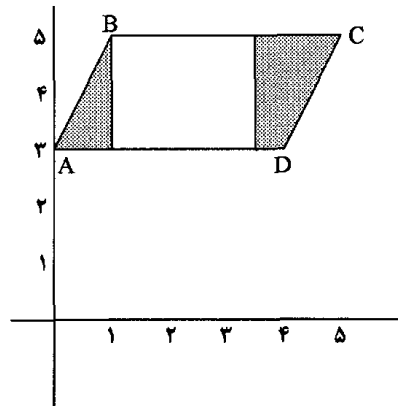
باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهائی درس : جبر و احتمال		رشته : ریاضی فیزیک	
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان : ۱۶ / ۱۶ / ۱۳۸۷	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره‌ی تابستانی (شهریور ماه) سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره	
۱	$x = 2k + 1$ $y = 2k + 3 \quad (0/25) \quad x + y = 2K + 1 + 2K + 3 = 4K + 4 = 4(K + 1) = 4t$ $(0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$	۱	
۱/۷۵	$P(1): (1 + \sqrt{v})^1 \geq 1 + \sqrt{v}(1) \rightarrow 1 + \sqrt{v} \geq 1 + \sqrt{v} \quad (0/25)$ $P(K): (1 + \sqrt{v})^K \geq 1 + \sqrt{v}K \quad \text{فرض } (0/25)$ $P(K+1): (1 + \sqrt{v})^{K+1} \geq 1 + \sqrt{v}(K+1) \quad \text{حکم } (0/25)$ طرفین فرض را در $1 + \sqrt{v}$ ضرب می‌کنیم. $(0/25)$ $(1 + \sqrt{v})^{K+1} \geq (1 + \sqrt{v}K)(1 + \sqrt{v}) \geq 1 + \sqrt{v}(K+1) \quad (0/25)$ $1 + \sqrt{v} + \sqrt{v}K + \sqrt{v} \geq 1 + \sqrt{v}K + \sqrt{v}$ $(0/5) \quad \text{بدیهی } \sqrt{v}K \geq 0 \text{ پس } P(K+1) \text{ برقرار است}$	۲	
۰/۵	$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5 \notin Q' \quad (0/5)$	خیر ۳	
۱	$n = 5k + r, \quad r \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (0/25)$ $\rightarrow n^3 = 125k^3 + 75k^2r + 15kr^2 + r^3, \quad r^3 \in \{1, 8, 27, 64\} \quad (0/25)$ $\rightarrow n^3 = 5(\underbrace{25k^3 + 15k^2r + 3kr^2}_{k'}) + r^3 = 5k' + r^3, \quad r^3 \neq 5q \quad (0/25)$ پس n^3 مضربی از ۵ نیست. $(0/25)$	فرض خلف: ۴	
۱/۲۵	$\hat{O}_1 = 45^\circ$ $\hat{A} = \frac{180 - 45}{2} = 67.5 \Rightarrow \hat{A} > \hat{O}_1 \rightarrow OB = OA > AB \quad (0/25)$ لانه $n = 8 \rightarrow 9 > 8$ کبوتر $m = 9 \quad (0/25)$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر درون یک لانه است که فاصله‌ی آنها از $OA = 1$ کمتر می‌باشد. $(0/25)$		۵
۱/۵	$(A - C) - (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C)' = (A \cap C') \cap (B' \cup C) = (0/25)$ $(0/25)$ $A \cap (C' \cap (B' \cup C)) = A \cap ((C' \cap B') \cup (C' \cap C)) = A \cap (C' \cap B') \quad (0/25)$ $(0/25) \quad \phi$ $(0/25) = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C \quad (0/25)$	۶	
۱	$\begin{cases} 2^3x + y = 64 \\ 5^2y = 125 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^3x + y = 2^6 \\ 5^2y = 5^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^3x + y = 6 \\ 2y = 5 \end{cases} \rightarrow y = 1 \quad (0/25) \rightarrow 2^3x + 1 = 6 \rightarrow x = \frac{5}{2}$ $(0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$	۷	
«ادامه در صفحه‌ی دوم»			

باسمه تعالی

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		
رشته: ریاضی فیزیک		
سال سوم آموزش متوسطه		
تاریخ امتحان: ۱۶ / ۱۶ / ۱۳۸۷		
اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره‌ی تابستانی (شهریور ماه) سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	$x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \rightarrow x = 1, x = 4 \quad A = \{1, 4\} \quad (0/5)$ $A^2 = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\} \quad (0/25)$ $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \quad (0/5)$ $B^2 - A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \quad (0/25)$	۱/۵
۹	<p>بازتابی $(x, y)R(x, y) \rightarrow x^2 - y = x^2 - y \quad (0/25)$</p> <p>تقارنی $(x, y)R(z, t) \rightarrow x^2 - y = z^2 - t \rightarrow z^2 - t = x^2 - y \rightarrow (z, t)R(x, y) \quad (0/25)$</p> <p>تراگذری $(x, y)R(z, t) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = z^2 - t \rightarrow x^2 - y = e^2 - f \rightarrow (x, y)R(e, f) \\ z^2 - t = e^2 - f \end{cases} \quad (0/5)$</p> <p>پس R یک رابطه‌ی هم ارزی است.</p> <p>$(x, y)R(1, 2) \rightarrow x^2 - y = 1^2 - 2 \rightarrow y = x^2 + 1 \quad (0/5)$</p>	۱/۵
۱۰	$(0/5) \quad S = \{30, 35, 39, 50, 53, 59, 90, 93, 95\}$ $(0/5) \quad A = \{30, 35, 50, 90, 95\}$ $(0/5) \quad B = \{53, 59, 90, 93, 95\}$ $(0/25) \quad B' = \{30, 35, 39, 50\}$ $(0/25) \quad A \cap B' = \{30, 35, 50\}$	۲
۱۱	$P = \frac{1}{2}$ پسر بودن $P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{15}{64} \quad (0/25)$ $(0/25)$	۱
۱۲	$(0/25) \quad P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$ $(0/25) \quad P(a) + P(b) + P(c) = \frac{17}{35} \rightarrow P(d) = 1 - \frac{17}{35} = \frac{18}{35} \quad (0/25)$ $P(a) + P(d) = \frac{5}{7} \rightarrow P(a) = \frac{5}{7} - \frac{18}{35} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5} \quad (0/25)$ $P(b) = P(c) \rightarrow 2P(b) + \frac{5}{7} = 1 \rightarrow 2P(b) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \rightarrow P(b) = P(c) = \frac{1}{7} \quad (0/25)$	۱/۵
۱۳	$P(A) = \frac{\binom{5}{2} \binom{7}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{10 \times 21}{495} = \frac{14}{33} \quad (0/5)$ $(0/5)$	۱
«ادامه در صفحه‌ی سوم»		

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: چبر و احتمال		رشته: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۶ / ۱۶ / ۱۳۸۷
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره‌ی تابستانی (شهریور ماه) سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$P(A) = 3P(A \cap B)$ $P(B) = \frac{3}{4}P(A \cap B) \quad (0/25)$ $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{3P(A \cap B) + \frac{3}{4}P(A \cap B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)}$ $= \frac{\frac{7}{4}P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{7}{4} \quad (0/25)$	
۱۵	 <p style="text-align: right;">$x > 3/5$ یا $x < 1$</p> <p style="text-align: center;">شکل (۰/۵)</p> $a_S = 4 \times 2 = 8 \quad (0/25)$ $a_A = 8 - 2/5 \times 2 = 3 \quad (0/25) \quad \text{یا} \quad \left(a_A = \frac{1}{4} \times 2 \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 \times (0/5 + 1/5) = 3 \right) \quad (0/25)$ $P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{3}{8} \quad (0/25)$	
۱۶	$(A \cap B') \cap (A \cap B) = A \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset \quad (0/25)$ $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A \quad (0/25)$ $P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A) \rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad (0/25)$	
۲۰	جمع نمره	

همکاران گرامی لطفاً برای پاسخ های صحیح دیگر نیز نمره‌ی مناسب منظور گردد.