

سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان : ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم ( خرداد ماه ) سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی ، ثابت کنید که رابطه ی زیر به ازای هر عدد طبیعی $n$ برقرار است : $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$	۱/۵
۲	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید . الف ) به ازای هیچ دو عدد اول $a$ و $b$ ، عدد $a+b$ اول نیست . ب ) اگر $x$ فرد باشد ، آنگاه $x(x+2)$ هم فرد می باشد .	۱/۵
۳	$S$ یک زیر مجموعه ی $65$ عضوی از اعداد طبیعی است ، اگر اعضای $S$ را بر عدد $16$ تقسیم کنیم ، نشان دهید دست کم $5$ عضو از $S$ دارای باقیمانده ی یکسانی بر $16$ می باشند.	۱
۴	ثابت کنید اگر $a, b$ دو عدد حقیقی باشند که $a+b > 0$ ، آنگاه رابطه ی زیر برقرار می باشد. $\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab$	۱/۵
۵	اگر مجموعه ی $A = \{ x, \{ x \}, \{ x, \{ x \} \} \}$ باشد ، کدامیک از عبارات زیر درست و کدامیک نادرست است؟ الف ) $\{ x \} \subseteq A$ ب ) $\{ \{ x \} \} \in A$	۰/۵
۶	اگر $A$ و $B$ و $C$ هر کدام یک مجموعه باشند : الف ) با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ثابت کنید : $A - (A - B) = A \cap B$ ب ) اگر $C \neq \emptyset$ و داشته باشیم : $A \times C = B \times C$ ، آنگاه ثابت کنید : $A = B$	۲/۲۵
۷	اگر $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$ و $R$ رابطه ای از $A$ به روی $B$ باشد که به صورت زیر تعریف شده است : ابتدا $A \times B$ را محاسبه کرده و سپس اعضای رابطه ی $R$ را تعیین کنید . $R = \left\{ (x, y) \mid \frac{x+y}{3} \in \mathbb{N} \right\}$	۱/۲۵
۸	رابطه ی $R$ روی $R - \{ \ast \}$ بصورت زیر تعریف شده است : $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2c-3}{d}$ الف ) ثابت کنید رابطه ی $R$ یک رابطه هم ارزی است . ب ) کلاس هم ارزی $[(-1, 7)]$ را به دست آورید .	۱/۵
	«ادامه سؤالات در صفحه ی دوم»	

سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم ( خرداد ماه ) سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۹	در قسمت های "الف" و "ب" داده شده ی زیر ، با عبارت مناسب جای خالی را تکمیل کنید و در قسمت "ج" با استفاده از واژه داده شده گزاره ها را کامل کنید. الف) هر..... ، یک زیر مجموعه از فضای نمونه ای است. ب) در فضای نمونه ای پرتاب یک سکه و یک تاس سالم با یکدیگر ، تعداد زیر مجموعه های فضای نمونه ای آن برابر ..... است. ج) انتخاب یک نقطه از سطح یک دایره، آزمایشی از فضای نمونه ای ..... و انتخاب تعداد محصولات معیوب یک کارخانه ، آزمایشی از فضای نمونه ای ..... است. (گسسته - پیوسته)	۱
۱۰	روی ۱۵ کارت یکسان، اعداد از یک تا ۱۵ را نوشته ایم ، کارتی را به تصادف خارج می کنیم : الف) پیشامد A را طوری بنویسید که عدد روی کارت مضرب ۳ یا اول باشد. ب) پیشامد B آن که عدد روی کارت فرد و اول باشد.	۱
۱۱	۴ نفر زن و ۶ نفر مرد ، برای تدریس درس ریاضی آموزشی تقاضا داده اند، امکان استخدام تنها برای سه نفر از آن ها وجود دارد. مطلوبست محاسبه ی احتمال آن که حداقل دو نفر زن انتخاب شوند.	۱/۲۵
۱۲	اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فضای نمونه یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم : $p(1) = 2p(2) = 3p(3) = 4p(4)$ مطلوبست محاسبه ی $p(1)$ .	۱/۵
۱۳	۵۰ درصد افراد جامعه ای با سواد هستند ، احتمال آن که از ۲۰ نفر آن ها ۶ نفر بیسواد بوده باشند را محاسبه کنید.	۰/۷۵
۱۴	دو عدد حقیقی $x, y$ را به تصادف از بازه ی $[0, 3]$ انتخاب می کنیم ، احتمال آن را حساب کنید که : الف) $x + y \leq 2$ ب) $x + y = 3$	۱/۵
۱۵	احتمال آنکه دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود ۵۵ درصد و در درس شیمی قبول شود ۶۰ درصد است ، اگر احتمال آنکه حداقل در یکی از دو درس قبول شود ۷۵ درصد باشد ، احتمال آن را بیابید که در هر دو درس قبول شود.	۱
۱۶	برای دو پیشامد A, B از فضای نمونه ای S ثابت کنید : $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$	۱
	جمع نمره	۲۰

« موفق باشید »

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	$p(1): \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$ $\text{فرض استقراء } P(K): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k} \quad (0/25)$ $\text{حکم استقراء } P(K+1): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} \quad (0/5)$ $p(k+1): \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-2k-4+k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} \quad (0/25)$	۱
۲	<p>الف) نادرست (۰/۲۵) و مثال نقض: ۳ و ۲ هر دو اول هستند و ۲+۳=۵ هم اول است. (۰/۲۵)</p> <p>ب) درست (۰/۲۵) و استدلال استنتاجی:</p> $x = 2k+1 \Rightarrow (2k+1)(2k+3) = 4k^2 + 8k + 3 = 2(2k^2 + 4k + 1) + 1 = 2k'+1 \quad (0/25)$	۲
۳	<p>مجموعه ۶۵ عضوی S = تعداد کبوترها (۰/۲۵)، باقیمانده های تقسیم بر ۱۶ = {۰, ۱, ۲, ..., ۱۵} = تعداد لانه ها (۰/۲۵)</p> <p>بر طبق اصل لانه کبوتر (۰/۲۵)، ۶۵ = ۴ × ۱۶ + ۱ ⇒ ۴ + ۱ = ۵، پس حداقل ۵ عضو باقیمانده ی یکسانی بر ۱۶ دارند.</p>	۳
۴	$\frac{a^3 + b^3}{a+b} \geq ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq (a+b)ab \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)ab \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (0/25)$ <p>بر طبق استدلال برگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده ایم پس حکم برقرار است. (۰/۲۵)</p>	۴
۵	<p>الف) درست</p> <p>ب) نادرست</p> <p>هر قسمت (۰/۲۵)</p>	۵
۶	<p>الف)</p> $A - (A - B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \phi \cup (A \cap B) = A \cap B \quad (0/25)$ <p>طبق فرض (۰/۲۵)</p>	۶
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

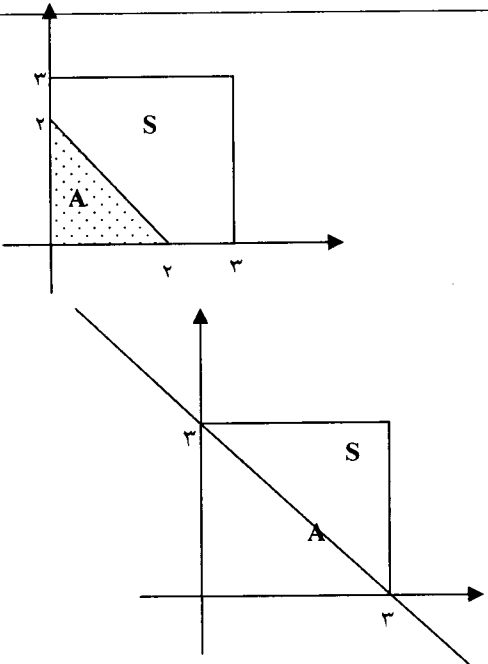
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

	<p>ب) راه حل اول: اثبات با برهان خلف (۰/۲۵)</p> <p><math>A \neq B \Rightarrow \exists x, y: x \in A, y \in B, x \neq y, C \neq \emptyset \Rightarrow z \in C</math> (۰/۵)</p> <p><math>\Rightarrow (x, z) \in A \times C, (y, z) \in B \times C, (x, z) \neq (y, z)</math></p> <p>که این متناقض با فرض می باشد.</p> <p><math>\Rightarrow A \times C \neq B \times C</math> (۰/۵)</p> <p>راه حل دوم:</p> <p><math>\forall x \in A, y \in C \Rightarrow (x, y) \in A \times C \xrightarrow{A \times C = B \times C} (x, y) \in B \times C</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\Rightarrow x \in B, y \in C \Rightarrow A \subseteq B</math> (I) (۰/۲۵)</p> <p><math>\forall x \in B, y \in C \Rightarrow (x, y) \in B \times C \xrightarrow{A \times C = B \times C} (x, y) \in A \times C</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\Rightarrow x \in A, y \in C \Rightarrow B \subseteq A</math> (II) (۰/۲۵) (I), (II) <math>\Rightarrow A = B</math> (۰/۲۵)</p>	
۱/۲۵	<p><math>A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,3), (2,5), (4,2), (4,3), (4,5)\}</math></p> <p>هر سه زوج مرتب نوشته شده (۰/۲۵) در کل (۰/۷۵)</p> <p><math>R = \{(1,2), (1,5), (4,2), (4,5)\}</math> (۰/۵)</p>	۷
۱/۵	<p>الف) رابطه بازتابی (۰/۲۵)</p> <p><math>(a, b) R (a, b) \Rightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2a-3}{b}</math></p> <p>ب) <math>(a, b) R (c, d) \Rightarrow (c, d) R (a, b)</math></p> <p><math>(a, b) R (c, d) \Rightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2c-3}{d} \Rightarrow \frac{2c-3}{d} = \frac{2a-3}{b} \Rightarrow (c, d) R (a, b)</math></p> <p>رابطه تقارنی (۰/۲۵)</p> <p>ج) <math>(a, b) R (c, d), (c, d) R (e, f) \Rightarrow (a, b) R (e, f)</math></p> <p><math>(a, b) R (c, d) \Rightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2c-3}{d}</math></p> <p><math>(c, d) R (e, f) \Rightarrow \frac{2c-3}{d} = \frac{2e-3}{f}</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{2a-3}{b} = \frac{2e-3}{f} \Rightarrow (a, b) R (e, f)</math></p> <p>رابطه تعدی (۰/۲۵)</p> <p>هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است. (۰/۲۵)</p> <p><math>[(-1, 7)] = \left\{ (x, y) \mid (x, y) R (-1, 7) \right\} \Rightarrow \frac{2x-3}{y} = \frac{2(-1)-3}{7} \Rightarrow y = \frac{-14}{5}x + \frac{21}{5}</math> (۰/۵)</p>	۸
	« ادامه در صفحه‌ی سوم »	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۹	الف) پیشامد یا بر آمد (ب) ۲۱۲ ج) پیوسته - گسسته هر قسمت (۰/۲۵)	۱
۱۰	$A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۲, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳\}$ (۰/۵) $B = \{۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳\}$ (۰/۵)	۱
۱۱	$p(A) = \frac{\binom{۰/۲۵}{۴} \binom{۰/۲۵}{۶} + \binom{۰/۲۵}{۴}}{\binom{۰/۲۵}{۱۰}} = \frac{۴۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱۲	$P(۱) = ۲ P(۲) = ۳ p(۳) = ۴ p(۴)$ $p(۴) = x \rightarrow P(۱) = ۴x, p(۲) = ۲x, p(۳) = \frac{۴}{۳}x$ $p(۱) + p(۲) + p(۳) + p(۴) = ۱ \Rightarrow ۴x + ۲x + \frac{۴}{۳}x + x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲۵} \Rightarrow p(۱) = \frac{۱۲}{۲۵}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۳	$p(A) = \frac{\binom{۰/۲۵}{۲۰}}{\binom{۰/۲۵}{۶}}$ (۰/۵)	۰/۷۵
۱۴	الف) $p(A) = \frac{\binom{۰/۲۵}{۲ \times ۲}}{۲ \times ۲} = \frac{۲}{۹}$ (الف) شکل (۰/۵) ب) $P(B) = \frac{۰}{۹} = ۰$ چون خط مساحتی ندارد. (۰/۲۵) شکل (۰/۲۵)	۱/۵

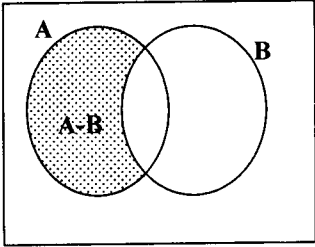


« ادامه در صفحه‌ی چهارم »

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۱۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱۵	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۰/۵) \quad ۰/۷۵ = ۰/۵۵ + ۰/۶۰ - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = ۰/۴۰ \quad (۰/۵)$	۱
----	---	---

۱۶	$A \cap B' = A - B \Rightarrow A = (A \cap B') \cup (A \cap B) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Rightarrow$ $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$ <p> <math>(A \cap B)</math> , <math>(A - B)</math> دو پیشامد متمایز و از هم جدا هستند. (۰/۲۵)                 </p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;">  </div> <div> <p>شکل (۰/۲۵)</p> </div> </div>	۱
----	--	---

	« موفق باشید »	جمع نمره	۲۰
--	----------------	----------	----

مصححین گرامی:

لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.