

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۱۰:۳۰ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان ۱۲ / ۱۰ / ۱۳۹۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استدلال استقرای ریاضی ، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید که رابطه ی زیر برقرار است. $\frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15} + \dots + \frac{1}{(2n+7)(2n+9)} = \frac{n}{9(2n+9)}$	۱/۵
۲	با استدلال استنتاجی ، ثابت کنید تفاضل مربعات دو عدد فرد همواره مضرب چهار است.	۱
۳	می دانیم که $\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ اعدادی گنگ هستند، با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ نیز گنگ است.	۱
۴	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند ، درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید : $x^f + y^f \geq x^y + x^z$	۱
۵	گروه خونی دانش آموزان یک کلاس ۳۱ نفری ، $A$ یا $B$ یا $O$ است ، حداقل چند نفر از دانش آموزان گروه خونی یکسانی را دارند و چرا ؟	۱
۶	اگر $A = \{x^2 - 1 \mid x \in N, x < 4\}$ باشد ، مجموعه $A$ و مجموعه توانی $A$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.	۱/۲۵
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ، درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید : $(A - B) \cup (A \cap C) = A - (B - C)$	۱/۲۵
۸	اگر مجموعه های $A$ و $B$ به صورت $A = \{x \in R \mid x^2 \leq 1\}$ و $B = \{x \in R \mid  x  \leq 2\}$ باشند ، نمودار $B \times A$ را رسم کنید.	۱/۲۵
۹	اگر رابطه ی $R$ روی اعداد صحیح $\{(0, 0)\} - Z^2$ ، به صورت زیر تعریف شده باشد : $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^y t = z^y y$ الف) ثابت کنید $R$ یک رابطه ی هم ارزی است . ب) کلاس هم ارزی $[(-2, 1)]$ را مشخص کنید .	۱/۷۵
	«ادامه سؤالات در صفحه ی دوم»	

## باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰:۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان ۱۲ / ۱۰ / ۱۳۹۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم ، مطلوب است : الف) تعیین پیشامد $A$ ، که عدد ظاهر شده روی یکی از تاسها مربع عدد ظاهر شده روی تاس دیگر باشد. ب) تعیین پیشامد $B$ ، که دقیقاً روی یکی از تاسها عدد ۴ ظاهر شده باشد. پ) $A \cap B$ را تعیین کنید. ت) $A - B$ را تعیین کنید.	۲
۱۱	یک خانواده ۳ فرزند دارد : الف) احتمال آنکه حداقل ۲ فرزند دختر داشته باشد را تعیین کنید. ب) احتمال آنکه حداکثر یک دختر داشته باشد را بیابید.	۱/۵
۱۲	سه دونه به نامهای $A$ و $B$ و $C$ در یک مسابقه شرکت می کنند ، شانس برنده شدن $A$ و $B$ با هم برابر است و شانس بردن $C$ ، دو برابر هر یک از آنهاست ، مطلوبست : الف) احتمال آنکه $C$ برنده شود. ب) احتمال آنکه $A$ یا $C$ برنده شوند.	۱/۵
۱۳	سکه ی سالمی را ۱۲ بار پرتاب می کنیم ، احتمال آنکه ۷ بار پشت سکه ظاهر شود ، چقدر است ؟	۱
۱۴	یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث با رأسهای $(۰, ۰)$ و $(۲, ۰)$ و $(۰, ۴)$ انتخاب می کنیم ، مطلوب است احتمال آن که طول نقطه ی انتخاب شده کمتر از ۲ باشد .	۲
۱۵	اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه ای $S$ باشند، بطوریکه $A \subseteq B$ ثابت کنید: $P(B - A) = P(B) - P(A)$	۱
	« موفق باشید »	۲۰
	جمع نمره	۲۰

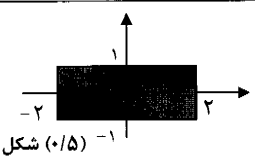
باسمه تعالی

ساعت شروع : ۳۰ : ۱۰ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۲ / ۱۰ / ۱۳۹۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۰

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$P(1) : \frac{1}{9 \times 11} = \frac{1}{9 \times 11} \quad (0/25)$ $P(K) : \frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15} + \dots + \frac{1}{(2K+7)(2K+9)} = \frac{K}{9(2K+9)} \quad (0/25)$ <p>فرض استقراء</p> $P(K+1) : \frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15} + \dots + \frac{1}{(2K+7)(2K+9)} + \frac{1}{(2K+9)(2K+11)} = \frac{K+1}{9(2K+11)} \quad (0/25)$ <p>حکم استقراء</p> $P(K+1) : \frac{K}{9(2K+9)} + \frac{1}{(2K+9)(2K+11)} = \frac{K(2K+11)+9}{9(2K+9)(2K+11)} = \frac{2K^2+11K+9}{9(2K+9)(2K+11)} = \frac{(K+1)(2K+9)}{9(2K+9)(2K+11)} = \frac{K+1}{9(2K+11)} \quad (0/25)$	۱/۵
۲	$(2K+1)^2 - (2K'+1)^2 = 4K^2 + 4K + 1 - 4K'^2 - 4K' - 1 = 4(K^2 + K - K'^2 - K') = 4A \quad (0/25)$ <p>(۰/۵)</p>	۱
۳	$3\sqrt{2} + \sqrt{5} = a \text{ (گویا)} \Rightarrow \sqrt{5} = a - 3\sqrt{2} \Rightarrow$ $\Delta = a^2 + 18 - 6a\sqrt{2} \Rightarrow 6a\sqrt{2} = a^2 + 18 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2 + 18}{6a} \Rightarrow \text{گویا} \neq \text{گنگ}$ <p>(۰/۲۵)</p> <p>به تناقض رسیده ایم یعنی حکم اولیه درست است. (۰/۲۵)</p>	۱
۴	$x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^3 - y^3) \geq 0$ <p>(۰/۲۵)</p> $\Leftrightarrow (x-y)^2(x^2 + y^2 + xy) \geq 0$ <p>چون <math>x, y</math> مثبت هستند، به عبارت همواره درست رسیده و بر طبق استدلال برگشتی حکم <math>(0/25)</math> است.</p>	۱
۵	<p>۳۱ نفر = کبوترهای مسئله (۰/۲۵) و ۳ گروه خونی A یا B یا O = لانه های مسئله (۰/۲۵) <math>31 = 3 \times 10 + 1</math>.</p> <p>بر طبق اصل لانه کبوتر حد اقل <math>10 + 1 = 11</math> نفر گروه خونی یکسانی را خواهند داشت. (۰/۲۵)</p>	۱
« ادامه در صفحه ی دوم »		

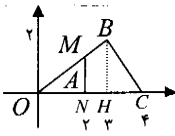
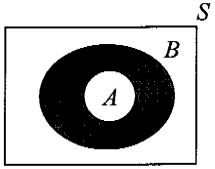
باسمه تعالی

ساعت شروع : ۳۰ : ۱۰ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۲ / ۱۰ / ۱۳۹۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۰

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۶	$A = \{ \cdot, ۳, ۸ \}$ (۰/۵) $P(A) = \{ \{ \cdot \}, \{ ۳ \}, \{ ۸ \}, \{ \cdot, ۳ \}, \{ \cdot, ۸ \}, \{ ۳, ۸ \}, \phi, \{ \cdot, ۳, ۸ \} \}$ (۰/۷۵)	۱/۲۵
۷	$(A - B) \cup (A \cap C) = (A \cap B') \cup (A \cap C) = A \cap (B' \cup C) =$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) $A \cap (B \cap C)' = A - (B \cap C) = A - (B - C)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۱/۲۵
۸	 <p>مشخص کردن A <math>-1 \leq y \leq 1</math> (۰/۲۵)                      مشخص کردن B <math>-2 \leq x \leq 2</math> (۰/۲۵)                      رسم نمودار کامل و مشخص کردن <math>B \times A</math> (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵
۹	بازتابی است. $(x, y)R(x, y) \Rightarrow x^y = x^y$ (۰/۲۵) تقارنی است $(x, y)R(z, t) \Rightarrow x^y = z^t \Rightarrow z^y = x^t \Rightarrow (z, t)R(x, y)$ (۰/۲۵) تعدی است $(x, y)R(z, t) \Rightarrow x^y = z^t \Rightarrow x^y = e^y \Rightarrow (x, y)R(e, y)$ (۰/۵) $(z, t)R(e, f) \Rightarrow z^t = e^f$ پس رابطه هم ارزی است (۰/۲۵) $[(-۲, ۱)] = \{ (x, y) \in Z^2 - \{ (\cdot, \cdot) \} \mid (x, y)R(-۲, ۱) \} = \{ (x, y) \mid x^y = ۴y \}$ (۰/۲۵)	۱/۷۵
۱۰	الف) $A = \{ (۱, ۱), (۲, ۴), (۴, ۲) \}$ (۰/۵) ب) $B = \{ (۱, ۴), (۲, ۴), (۳, ۴), (۵, ۴), (۶, ۴), (۴, ۱), (۴, ۲), (۴, ۳), (۴, ۵), (۴, ۶) \}$ (۰/۷۵) پ) $A \cap B = \{ (۲, ۴), (۴, ۲) \}$ (۰/۵) ت) $A - B = \{ (۱, ۱) \}$ (۰/۲۵)	۲
۱۱	$n(S) = ۲^۳ = ۸$ (۰/۲۵) الف) $n(A) = \binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۱} = ۳ + ۱ = ۴$ (۰/۵) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵) ب) $n(B) = \binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۱} = ۳ + ۱ = ۴$ (۰/۲۵) $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)	۱/۵
	«ادامه در صفحه‌ی سوم»	

باسمه تعالی

ساعت شروع : ۱۰:۳۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۲ / ۱۰ / ۱۳۹۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۰

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۲	$P(A) = P(B) \quad (۰/۲۵)$ $P(C) = 2P(A) = 2P(B) \quad (۰/۲۵)$ $P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad (۰/۲۵)$ $P(A) + P(A) + 2P(A) = 1 \Rightarrow 4P(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} \quad (۰/۲۵) \quad \text{الف}$ $P(C) = 2P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$ $P(\{A, C\}) = P(A) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad (۰/۲۵) \quad \text{ب}$	۱/۵
۱۳	<p>صورت و مخرج کسر هر قسمت (۰/۵)</p> $P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{12}{5}}{2^{12}}$	۱
۱۴	$a(S) = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \quad (۰/۵)$  $MN \parallel BH \Rightarrow \frac{MN}{BH} = \frac{ON}{OH} \Rightarrow \frac{MN}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow MN = \frac{4}{2} \quad (۰/۲۵)$ $a(A) = \frac{ON \times MN}{2} = \frac{2 \times \frac{4}{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad (۰/۵)$ $P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$ <p>شکل (۰/۵)</p>	۲
۱۵	$B = (B - A) \cup A \quad (۰/۲۵)$ $P(B) = P[(B - A) \cup A]$ <p>دو پیشامد ناسازگارند پس طبق اصل ۳ داریم:</p> $P(B) = P(B - A) + P(A) \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (۰/۲۵)$  <p>شکل (۰/۲۵)</p>	۱
۲۰	جمع نمره	

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.