

سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان ۱۰ / ۳ / ۱۳۹۱	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استدلال استقرای ریاضی ، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید :	۱/۲۵
	$(1 + \sqrt{3})^n \geq 1 + n\sqrt{3}$	
۲	کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است ؟ (با ذکر دلیل) الف) اگر a, b دو عدد صحیح و فرد به طوری که هر دو مضربی از ۵ باشند آنگاه مجموع آنها مضرب ۱۰ است. ب) اگر a یک عدد حقیقی و $a^2 > 0$ آنگاه $a > 0$ است. پ) اگر a, b, c اعداد طبیعی باشند آنگاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.	۱/۷۵
۳	۵۰ عدد طبیعی متمایز را در نظر گرفته و هر یک از این اعداد را بر عدد ۲۴ تقسیم کرده ایم ، حداقل چند تا از آن ها باقیمانده ی یکسانی را بر ۲۴ خواهند داشت و چرا ؟	۱
۴	اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند ، ثابت کنید :	۰/۷۵
	$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$	
۵	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(\Delta n + 3)$ زوج باشد آنگاه n یک عدد فرد است.	۰/۷۵
۶	مجموعه های $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2\}$ مفروضند : الف) A, B را با نوشتن عضوها مشخص کنید. ب) $A \Delta B$ را مشخص کنید. ج) $(A \Delta B) \times A$ را مشخص کرده و نمودار آن را رسم کنید.	۲
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ، ثابت کنید : الف) $(C \cap A \cap B) \cup (A - C) \cup (A - B) = A$ ب) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$	۲
۸	رابطه ی R روی R^2 به صورت زیر تعریف شده است : الف) نشان دهید که این رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-1, 2)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
	$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ab = cd$	
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۰ / ۳ / ۱۳۹۱		سال سوم آموزش متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱	

ردیف	سؤالات	نمره
۹	یک طرف سکه ی سالمی عدد ۱ و در طرف دیگر آن عدد ۲ نوشته ایم ، این سکه را ۳ بار پرتاب می کنیم : الف) فضای نمونه ای این تجربه ی تصادفی را بنویسید. ب) پیشامد A ، که در آن مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب اول و دوم برابر ۳ باشد را مشخص کنید. پ) پیشامد B ، که در آن عدد ظاهر شده در پرتاب دوم برابر ۱ باشد را بنویسید. ت) پیشامد آن که B رخ دهد ولی A رخ ندهد را تعیین کنید.	۲
۱۰	درون کیسه ای ۵ مهره ی سفید و ۶ مهره ی سیاه و ۴ مهره ی قرمز وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره با هم به تصادف خارج می کنیم ، مطلوب است : الف) احتمال آن که دقیقاً ۲ تا از مهره های خارج شده سفید باشند. ب) احتمال آن که مهره های خارج شده از ۳ رنگ مختلف باشند.	۱/۵
۱۱	تاس سالمی را ۱۲ بار پرتاب می کنیم ، احتمال آن که ۴ بار عدد فرد روی تاس ظاهر شده باشد ، چقدر است ؟	۰/۷۵
۱۲	سه نفر دونده a ، b ، c در یک مسابقه شرکت می کنند ، احتمال برد a نصف احتمال برد b و احتمال برد b $\frac{1}{3}$ احتمال برد c است : الف) احتمال برد هر یک از دونده ها را بیابید. ب) احتمال آن که b یا c برنده شوند را تعیین کنید.	۱/۷۵
۱۳	تیری را به سمت هدفی مربع شکل به ضلع ۴ پرتاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که نقطه ی اصابت تیر درون دایره ای به شعاع ۰/۵ که مرکز آن منطبق بر مرکز مربع است ، قرار بگیرد.	۱/۵
۱۴	اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که داشته باشیم $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ مطلوب است محاسبه ی $P(A - B)$.	۱/۵
	جمع نمره	۲۰
	« موفق باشید »	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۰ / ۳ / ۱۳۹۱	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	$p(1) : 1 + \sqrt{3} \geq 1 + \sqrt{3} \quad (0/25) \quad p(2) : (1 + \sqrt{3})^2 \geq 1 + 2\sqrt{3}$ $p(k) : (1 + \sqrt{3})^k \geq 1 + k\sqrt{3}$ $p(k+1) : (1 + \sqrt{3})^{k+1} \geq 1 + (k+1)\sqrt{3} \quad (0/25)$ <p>دو طرف فرض را در $1 + \sqrt{3}$ ضرب می کنیم.</p> $(1 + \sqrt{3})^k (1 + \sqrt{3}) \geq (1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) \quad (0/25)$ $(1 + \sqrt{3})^{k+1} \geq (1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$ $(1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) \geq 1 + (k+1)\sqrt{3} \quad (0/25)$ $\Rightarrow 1 + \sqrt{3} + k\sqrt{3} + 3k \geq 1 + k\sqrt{3} + \sqrt{3} \Rightarrow 3k \geq 0 \quad (0/25)$ <p>باید ثابت کنیم : بدیهی است</p>	۱/۲۵
---	--	------

۲	$\left. \begin{matrix} a = 5q \\ b = 5t \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + b = 5q + 5t = 5(q + t) = 5(2k) = 10k \quad (0/25)$ <p>الف) درست است جمع دو عدد فرد زوج است (۰/۲۵) الف) راه حل دوم :</p> $\left. \begin{matrix} a = 5(2t + 1) \\ b = 5(2t' + 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + b = 5(2t + 1) + 5(2t' + 1) = 10(t + t' + 1) = 10k \quad (0/25)$ <p>ب) نادرست است. (۰/۲۵) پ) نادرست است. (۰/۲۵) گنگ نیست (۰/۲۵) $\left. \begin{matrix} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b\sqrt{ac} = 5\sqrt{4} = 10 \quad (0/25)$</p>	۱/۲۵
---	---	------

۳	<p>هر عدد یک کیبوتر (۰/۲۵) $m = 50$</p> <p>هر باقیمانده بر ۲۴ یک لانه (۰/۲۵) $n = 24$</p> <p>طبق اصل لانه کیبوتری (۰/۲۵) $50 = 2 \times 24 + 2$ پس حداقل در یکی از لانه ها (۰/۲۵) $2 + 1 = 3$ کیبوتر خواهد بود. یعنی حداقل ۳ عدد باقیمانده یکسان بر ۲۴ دارند.</p>	۱
---	---	---

۴	$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c \Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c \geq 0 \Leftrightarrow (0/25)$ $(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (0/25)$ $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$ <p>عبارت همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی برقرار می باشد. (۰/۲۵)</p> <p>« ادامه در صفحه ی دوم »</p>	۰/۲۵
---	---	------

باسمه تعالی

ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۳ / ۱۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۵	<p>(۰/۲۵) $n \neq 2k + 1 \Rightarrow n = 2k$ فرض خلف</p> <p>(۰/۲۵) $5n + 3 = 5(2k) + 3 = 10k + 3 = 2(5k + 1) + 1 = 2q + 1$ (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۲۵)</p> <p>این تناقض نشان می دهد که فرض خلف نادرست است.</p>	۰/۷۵
۶	<p>(۰/۲۵) $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 4, 9\}$ (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۵) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 4, 1, 9\} - \{4\} = \{2, 1, 9\}$</p> <p>(۰/۵) $(A \Delta B) \times A = \{2, 1, 9\} \times \{2, 4\} = \{(2, 2), (2, 4), (1, 2), (1, 4), (9, 2), (9, 4)\}$</p> <p>رسم نمودار مختصاتی آن (۰/۵)</p>	۲
۷	<p>(الف) $(C \cap A \cap B) \cup (A - C) \cup (A - B) = (C \cap A \cap B) \cup (A \cap C') \cup (A \cap B') =$ (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۲۵) $A \cap [(C \cap B) \cup (C' \cup B')] = A \cap [(C \cap B) \cup (C \cap B)'] = A \cap U = A$ (۰/۲۵)</p> <p>(ب) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B) = B$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (A \cup B)' = B'$ (۰/۲۵) \Rightarrow</p> <p>(۰/۲۵) $A' \cap B' = B' \Rightarrow B' \subseteq A'$ (۰/۲۵)</p>	۲
۸	<p>(الف) رابطه ی بازتابی (۰/۲۵) $\forall (a, b) \in R^2, (a, b) R(a, b) \Rightarrow ab = ab$</p> <p>$(a, b) R(c, d) \Rightarrow (c, d) R(a, b)$</p> <p>(۰/۲۵) رابطه ی تقارنی $(a, b) R(c, d) \Rightarrow ab = cd \Rightarrow cd = ab \Rightarrow (c, d) R(a, b)$</p> <p>$(a, b) R(c, d) \Rightarrow (a, b) R(e, f)$</p> <p>$(c, d) R(e, f)$</p> <p>(۰/۵) رابطه تعدی $ab = cd \Rightarrow ab = ef \Rightarrow (a, b) R(e, f)$</p> <p>$cd = ef$</p> <p>هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است.</p> <p>(ب) $[(-1, 2)] = \{(x, y) (x, y) R(-1, 2)\} \Rightarrow \{(x, y) xy = -2\}$ (۰/۲۵)</p> <p>(۰/۲۵)</p>	۱/۵
	« ادامه در صفحه ی سوم »	

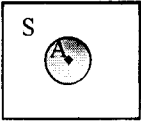
باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۰ / ۳ / ۱۳۹۱	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۹	<p>الف) $S = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$ (۰/۷۵)</p> <p>ب) $A = \{(1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2)\}$ (۰/۵)</p> <p>پ) $B = \{(1,1,1), (1,1,2), (2,1,1), (2,1,2)\}$ (۰/۵)</p> <p>ت) $B - A = \{(1,1,1), (1,1,2)\}$ (۰/۲۵)</p>	
۱۰	<p>الف) $p(A) = \frac{C(5,2) \times C(10,1)}{C(15,3)} = \frac{100}{455} = \frac{20}{91}$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) $p(B) = \frac{C(5,1) \times C(6,1) \times C(4,1)}{C(15,3)} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$ (۰/۲۵)</p>	
۱۱	<p>$p(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{12}{4}}{2^{12}}$ (۰/۲۵)</p>	
۱۲	<p>$p(a) + p(b) + p(c) = 1$ (۰/۲۵)</p> <p>$p(a) = \frac{1}{3} p(b)$</p> <p>$p(b) = \frac{1}{3} p(c)$</p> <p>$p(c) = x$</p> <p>$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{6}{9}$ (۰/۲۵)</p> <p>الف) $p(a) = \frac{1}{9}$, $p(b) = \frac{2}{9}$, $p(c) = \frac{6}{9}$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) $p\{b, c\} = p(b) + p(c) = \frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9}$ (۰/۲۵)</p>	
	« ادامه در صفحه ی چهارم »	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان ۱۰ / ۳ / ۱۳۹۱	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح		
نمره			
۱۳	 <p>شکل (۰/۵) ۲</p>	$p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{16} = \frac{\pi}{64} \quad (۰/۲۵)$	
۱۴	$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$ $\frac{2}{3} = p(A) - p(A \cap B) + \frac{1}{4} \quad (۰/۲۵)$ $\frac{2}{3} = p(A - B) + \frac{1}{4} \Rightarrow p(A - B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \quad (۰/۲۵)$		
۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »	