

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۲/۲۹	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی $n > 6$ ، ثابت کنید:	۱/۷۵
	$n! > 3^n$	
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است.	۱
۳	یک مدرسه حداقل چه تعداد دانش آموز باید داشته باشد تا دست کم ۱۳ دانش آموز در یک ماه از سال متولد شده باشند.	۰/۷۵
۴	اگر a, b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:	۱/۲۵
	$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	
۵	کدام یک از احکام زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض بیاورید. الف) برای هر دو مجموعه دلخواه A, B داریم: $A \times B = B \times A$ ب) اگر n^2 مضرب ۳ باشد آنگاه n نیز مضرب ۳ است.	۰/۷۵
۶	مجموعه های $A = \{x x \in Z, x^2 < 1\}$ و $B = \{\frac{1-x}{2} x \in N, x \leq 2\}$ مفروضند: الف) مجموعه های A, B را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $A \Delta B$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید اگر $A \cup B = A \cap B$ آنگاه $A = B$	۱
۸	اگر $A = (-\infty, -1]$ و $B = [-2, 3]$ باشد، نمودار حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را رسم کنید.	۰/۷۵
۹	رابطه ی R روی Z به صورت ذیل تعریف شده است: $x R y \Leftrightarrow 4 x - y$ الف) نشان دهید که R یک رابطه هم ارزی است. ب) رابطه ی R مجموعه Z را به چند کلاس هم ارزی افراز می کند؟	۱/۵
۱۰	اگر رابطه ی R بر روی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به صورت زیر تعریف شده باشد: $x R y \Leftrightarrow -10 \leq x + 5y \leq 10$ رابطه ی R را به صورت زوج های مرتب مشخص کنید.	۱

سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۲/۲۹	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	
۱۱	در خانواده ای با سه فرزند : الف) فضای نمونه را بنویسید. ب) پیشامد A که در آن خانواده حداکثر یک فرزند دختر باشد. پ) پیشامد B که در آن خانواده فقط یک دختر باشد. ت) پیشامد $A' \cup B'$ را مشخص کنید.	۲
۱۲	از کیسه ای که شامل ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز و یک مهره سفید است، ۲ مهره با هم به تصادف بیرون می آوریم احتمال آنکه مهره ها هم رنگ باشند چقدر است ؟	۱/۵
۱۳	تاس سالمی را ۸ بار پرتاب می کنیم ، احتمال آنکه حداقل ۶ بار عددی اول ظاهر شود چقدر است ؟	۰/۷۵
۱۴	اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی و $p(b) = \frac{1}{3}$ ، $p(\{b, d\}) = \frac{1}{4}$ و $p(\{b, c\}) = \frac{2}{3}$ باشد آنگاه $p(a)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۵	دو عدد حقیقی به تصادف بین 0 و 2 انتخاب می کنیم ، احتمال آنکه $ x - y < 1$ را محاسبه کنید .	۲
۱۶	عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می کنیم ، احتمال این که عدد انتخابی بر ۴ بخش پذیر باشد ، اما بر ۷ بخش پذیر نباشد ، چقدر است ؟	۱/۵
	« موفق باشید »	جمع نمره
		۲۰

باسمه تعالی

ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

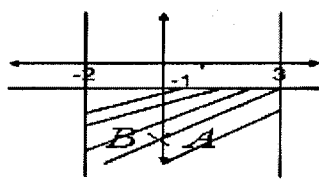
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۷۵	$p(y): y! > 3^y \quad (۰/۲۵)$ $p(k): K! > 3^k \quad (۰/۲۵)$ $P(k+1): (k+1)! > 3^{k+1} \quad (۰/۲۵)$ <p>دو طرف فرض را در $K+1$ ضرب می کنیم.</p> $K! (k+1) > 3^k (k+1) \quad (۰/۲۵)$ $(k+1)! > 3^k (k+1) \quad (۰/۲۵)$ $3^k (k+1) > 3^{k+1} \quad \text{باید ثابت کنیم:}$ $3^k (k+1) > 3^k \times 3 \rightarrow (k+1) > 3 \quad (۰/۲۵)$ <p>باتوجه به اینکه $k > 6$ است درستی عبارت فوق بدیهی است. (۰/۲۵)</p>	۱
۱	$\left. \begin{array}{l} x = 2n+1 \\ y = 2m+1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 =$ $2(2n^2 + 2n + 2m^2 + 2m + 1) = 2k \quad (۰/۲۵)$	۲
۰/۷۵	<p>m = تعداد کبوتر</p> <p>n = تعداد لانه = ۱۲</p> <p>طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه ها $12+1=13$ کبوتر است. (۰/۲۵)</p> <p>و همچنین $m = (12 \times 12) + 1 = 145$ (۰/۲۵) دانش آموز وجود دارد (۰/۲۵)</p>	۳
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۲۵	$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (۰/۵)$ <p>با توجه به اینکه عبارت فوق همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی تمامی روابط برگشت پذیر می‌باشد. (۰/۲۵)</p>	۴
۰/۷۵	الف) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵)	۵
۱/۲۵	<p>الف) $A = \{0\} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad B = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\} \quad (۰/۲۵)$</p> <p>ب) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\} - \{0\} = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad (۰/۲۵)$ (۰/۵)</p>	۶
۱	$\left. \begin{array}{l} (A \cap B) \subseteq A \\ B \subseteq (A \cup B) \Rightarrow B \subseteq (A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow B \subseteq A \quad (۰/۵)$ <p>به همین ترتیب ثابت میشود:</p> <p>(۰/۲۵) $A \subseteq B$</p> <p>بنابراین :</p> <p>(۰/۲۵) $A = B$</p>	۷
۰/۷۵	 <p>رسم نمودار (۰/۷۵) نمره</p>	۸
« ادامه در صفحه ی سوم »		

باسمه تعالی

ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

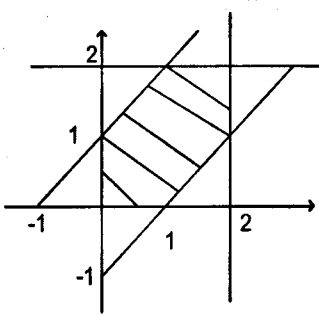
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۹	الف) $\forall x \in Z, xRx \Rightarrow \neg(x-x) \Rightarrow \neg 0$ رابطه بازتابی (۰/۲۵) ب) $xRy \Rightarrow \neg(x-y) \Rightarrow \neg(y-x) \Rightarrow \neg(y-x) \Rightarrow yRx$ رابطه تقارنی (۰/۲۵) ج) $\left. \begin{array}{l} xRy \Rightarrow \neg(x-y) \Rightarrow x-y = \neg k \\ yRz \Rightarrow \neg(y-z) \Rightarrow y-z = \neg k' \end{array} \right\} \Rightarrow x-z = \neg(k+k') = \neg k'' \Rightarrow xRz \quad (۰/۲۵)$ رابطه تعدی است. (۰/۲۵) رابطه هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است. (۰/۲۵) رابطه مجموعه اعداد صحیح را به \mathbb{Z} کلاس هم ارزی افراز می کند. (۰/۲۵)	۱/۵
۱۰	۱ $R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$	۱
۱۱	۲ $S = \{(d,d,d), (d,d,p), (d,p,d), (p,d,d), (p,p,p), (p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (۰/۵)$ $A = \{(p,p,p), (p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (۰/۵)$ $B = \{(p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (۰/۵)$ $A' \cup B' = \{(d,d,d), (d,d,p), (d,p,d), (p,d,d), (p,p,p)\} (۰/۵)$	۲
۱۲	۱/۵ $p(A) = \frac{C(4,2) + C(3,2)}{C(7,2)} = \frac{6 + 3}{21} = \frac{9}{21} (۰/۲۵)$	۱/۵
۱۳	۰/۷۵ $p(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{n}{6} + \binom{n}{7} + \binom{n}{8}}{2^n} (۰/۲۵)$	۰/۷۵
	"ادامه در صفحه ی چهارم"	

باسمه تعالی

ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۲۵	$p(\{b,c\}) = \frac{2}{3} \Rightarrow p(b) + p(c) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + p(c) = \frac{2}{3} \Rightarrow p(c) = \frac{1}{3}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $p(\{b,d\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow p(b) + p(d) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} + p(d) = \frac{1}{2} \Rightarrow p(d) = \frac{1}{6}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1 \Rightarrow p(a) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \Rightarrow p(a) = \frac{1}{6}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱۴
------	--	----

۲	$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $A = \{(x, y) \mid -1 < x - y < 1\}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> <p style="text-align: right;">رسم شکل (۰/۵)</p>  $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{2}{4}$ <p style="text-align: center;">(۰/۵) (۰/۲۵)</p>	۱۵
---	---	----

۱/۵	$n(A \cap B) = \left[\frac{10000}{28} \right] = 357$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $n(A) = \left[\frac{10000}{4} \right] = 2500$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $P(A \cap B') = p(A) - p(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{2500}{10000} - \frac{357}{10000} = \frac{2143}{10000}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱۶
-----	---	----

۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »
----	----------	----------------

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.