

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۰۶/۱۵	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهر یور ماه سال ۱۳۹۳		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	جاهای خالی را با یکی از گزینه‌های داخل پرانتز کامل کنید: الف) اگر $B \subseteq A$ ولی ..... ، آنگاه $B$ زیر مجموعه سره $A$ نامیده می شود. ( $B \neq A$ ، $B = A$ ) ب) اگر $A$ و $B$ دو پیشامد باشند به طوریکه $A \cap B = \emptyset$ در این صورت دو پیشامد را ..... می نامیم. ( سازگار ، ناسازگار )	۰/۵
۲	با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$	۱/۵
۳	کدام یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید. الف) توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است. ب) حاصلضرب دو عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۸ است.	۱/۲۵
۴	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید: $a^2 + b^2 \geq 2(b - 1)$	۱
۵	با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی، $x \neq 3$ و $x + 4y^2 = 7$ آنگاه $y \neq -1$ است.	۰/۷۵
۶	$S$ یک زیر مجموعه ۴۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای $S$ را بر عدد ۳۹ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۹ هستند.	۱
۷	اگر $A_n = \{ m \in \mathbb{N} \mid n-1 < m < n+1 \}$ باشد، آنگاه مجموعه $A_1$ و مجموعه توانی $A_1$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.	۱
۸	مجموعه‌های $A = \{1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$ مفروضند: الف) مجموعه $B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $A^2 - (B \times A)$ را مشخص کنید و نمودار آن را در صفحه مختصات رسم کنید.	۱/۵
۹	اگر $A$ و $B$ دو مجموعه باشند به طوریکه $B \subseteq A$ ، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A - B) \cup B = A$	۱/۲۵
۱۰	رابطه‌ی $R$ روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است: $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ الف) نشان دهید که $R$ یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-1, 0)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		رشته‌ی: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	
نام و نام خانوادگی:		سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۰۶/۱۵		تعداد صفحه: ۲	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۳		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir					
ردیف	سؤالات						
۱۱	فرض کنید $A, B, C$ سه پیشامد معین باشند، پیشامد « فقط پیشامد $A$ اتفاق بیفتد » را با یک عبارت مجموعه‌ای مناسب بنویسید و آن را با استفاده از نمودار ون نشان دهید.						
۱۲	دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، اگر هر دو سکه پشت بیاید آنگاه یک تاس را می‌ریزیم. مطلوب است: (الف) فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی (ب) پیشامد $A$ که در آن دقیقاً هر دو سکه به پشت و عدد تاس بزرگتر از ۴ باشد. (ج) پیشامد $B$ که در آن حداقل یک سکه رو بیاید.						
۱۳	۱۰ نفر را در نظر می‌گیریم، احتمال اینکه روز تولد هیچ دو نفری از آنها یک روز نباشد را مشخص کنید. (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید.)						
۱۴	۵ نفر زن و ۷ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال، امکان استخدام تنها برای ۳ نفر از آنها وجود دارد احتمال انتخاب ۳ نفر را در حالت‌های زیر پیدا کنید: (ساده کردن جواب‌ها الزامی است). الف) ۲ زن و یک مرد انتخاب شوند. ب) ۳ زن انتخاب شوند.						
۱۵	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد سه برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس، پیشامد $A = \{2, 3\}$ باشد، $P(A)$ را بیابید.						
۱۶	برروی مربع $Q$ با مشخصات $Q = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ یک نقطه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، مطلوبست احتمال این که فاصله این نقطه از هر رأس مربع بیشتر از ۱ باشد.						
۱۷	اگر $P(A) = \frac{2}{5}, P(B') = \frac{3}{7}, P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ باشند، مطلوب است: الف) $P(A \cup B)$ ب) $P(A - B)$						
۲۰	جمع نمره « موفق باشید »						

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۵ / ۰۶ / ۱۳۹۳	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۳		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

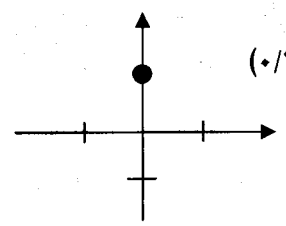
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	الف) $B \neq A$ (۰/۲۵) ص ۳۹ ب) ناسازگار (۰/۲۵) ص ۱۱۲	۰/۵
۲	ص ۱۵ درست است (۰/۲۵) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $P(1): \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ : آزمون استقراء $P(k): \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{K}{(K+1)}$ (۰/۲۵) $K \in N$ فرض استقراء $p(k+1): \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$ (۰/۲۵) حکم استقراء به طرفین فرض $\frac{1}{(K+1)(K+2)}$ را اضافه می کنیم: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{K}{K+1} + \frac{1}{(k+1)(K+2)}$ (۰/۲۵) = $\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(K+2)}$ (۰/۲۵) = $\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$ (۰/۲۵) پس حکم برقرار است.	۱/۵
۳	الف) نادرست (۰/۲۵) - ارایه مثال نقض (۰/۲۵) ص ۲۷ ب) درست (۰/۲۵) ص ۱۹	۱/۲۵
۴	$a^2 + b^2 \geq 2(b-1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2b - 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 2 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 1 + 1 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2 + 1 + (b-1)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت پذیر می باشند. (۰/۲۵) ص ۲۴	۱
۵	خلاف فرض مسأله است (۰/۲۵) $x = 3$ $(\text{فرض خلف}) : y = -1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x + 4(-1)^2 = 7 \Rightarrow x = 3$ (۰/۲۵) پس فرض خلف باطل و حکم $y \neq -1$ برقرار است. (۰/۲۵) ص ۳۰	۰/۷۵

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال	رشته ی : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۵ / ۰۶ / ۱۳۹۳	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

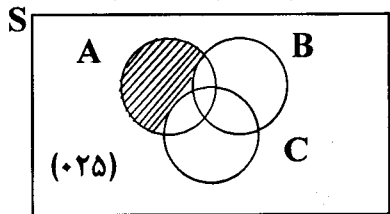
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۶	می دانیم مجموعه باقیمانده های هر عدد طبیعی بر ۳۹ به صورت $\{0, 1, 2, \dots, 38\}$ است. (۰/۲۵) اگر اعضای S (۴۰ نفر) را تعداد کبوترها و تعداد باقیمانده (۳۹) را لانه کبوترها در نظر بگیریم $(40 > 39)$ (۰/۵) طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عضو از این مجموعه وجود دارد که دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۹ است. (۰/۲۵) ص ۳۱	۱
۷	ص ۴۱، ۵۶ $A_1 = \{m \in \mathbb{N} \mid 0 < m < 2\}$ (۰/۲۵) = $\{1\}$ (۰/۲۵) $P(A_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$ (۰/۵)	۱
۸	ص ۶۱ الف) $B = \{0, 1\}$ (۰/۵) $A^2 = \{(1, 1)\}$ (۰/۲۵) ب) $B \times A = \{(0, 1), (1, 1)\}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (B \times A) - A^2 = \{(0, 1)\}$ (۰/۲۵) رسم نمودار (۰/۲۵) 	۱/۵
۹	$(A-B) \cup B = (A \cap B') \cup B$ (۰/۲۵) = $(A \cup B) \cap (B' \cup B)$ (۰/۲۵) = $(A \cup B) \cap M$ (۰/۲۵) = $A \cup B$ (۰/۲۵) = A چون $B \subseteq A$ در نتیجه $A \cup B = A$ است. (۰/۲۵) ص ۵۷	۱/۲۵
۱۰	الف) ۱) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) R (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a$ (۰/۲۵) بازتابی است ۲) $(a, b) R (c, d) \Rightarrow a + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a \Rightarrow (c, d) R (a, b)$ (۰/۲۵) تقارنی است ۳) $(a, b) R (c, d) \Rightarrow a + d = b + c$ $(c, d) R (e, f) \Rightarrow c + f = d + e \Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow (a, b) R (e, f)$ (۰/۲۵) ترابایی است پس رابطه R هم ارزی است (۰/۲۵) ص ۷۰ ب) $[(-1, 0)] = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) R (-1, 0)\}$ (۰/۲۵) $a + 0 = b - 1$ (۰/۲۵)	۱/۵

## باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۵ / ۰۶ / ۱۳۹۳	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

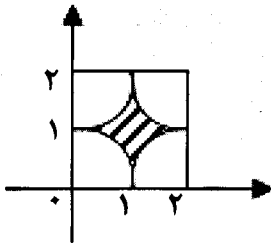
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱۱	ص ۸۲	۰/۵	$A - (B \cup C) \quad (۰/۲۵)$ 
۱۲	ص ۸۳	۱/۵	<p>الف) <math>S = \left\{ \overbrace{\left( \binom{۰/۲۵}{r}, \binom{۰/۲۵}{r,p}, \binom{۰/۲۵}{r,p}, \binom{۰/۲۵}{p,p,1}, \binom{۰/۲۵}{p,p,2}, \binom{۰/۲۵}{p,p,3}, \binom{۰/۲۵}{p,p,4}, \binom{۰/۲۵}{p,p,5}, \binom{۰/۲۵}{p,p,6} \right)} \right\}</math></p> <p>ب) <math>A = \left\{ \left( \binom{۰/۲۵}{p,p,5}, \binom{۰/۲۵}{p,p,6} \right) \right\} \quad (۰/۵)</math></p> <p>ج) <math>B = \left\{ \left( \binom{۰/۲۵}{r}, \binom{۰/۲۵}{r,p}, \binom{۰/۲۵}{r,p} \right) \right\} \quad (۰/۵)</math></p>
۱۳	ص ۸۸	۰/۷۵	$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad (۰/۲۵) = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \dots \times (۳۶۵ - ۱ + ۱)}{۳۶۵^{۱۰}} \quad (۰/۲۵)$
۱۴	ص ۹۲	۱/۵	$n(s) = \binom{۱۲}{۳} \quad (۰/۲۵)$ <p>الف) <math>P(A) = \frac{\binom{۵}{۲} \times \binom{۷}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}} \quad (۰/۵) = \frac{۷۰ \cdot (۰/۲۵)}{۲۲۰} = \frac{۷}{۲۲}</math></p> <p>ب) <math>P(B) = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}} \quad (۰/۲۵) = \frac{۱۰ \cdot (۰/۲۵)}{۲۲۰} = \frac{۱}{۲۲}</math></p>
۱۵	ص ۹۹	۱/۵	$\left. \begin{aligned} p(1) &= p(3) = p(5) = 3a \\ p(2) &= p(4) = p(6) = a \end{aligned} \right\} \quad (۰/۵)$ $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 \quad (۰/۲۵)$ $3a + a + 3a + a + 3a + a = 1$

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۵ / ۰۶ / ۱۳۹۳	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

	$12a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{12} \quad (0/25)$ $p(A) = p(2) + p(3) \quad (0/25) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} \quad (0/25) = \frac{1}{3}$	
۱۶	<p>ص ۱۰۴ و ۱۰۹</p> $a_s = (2)^2 = 4 \quad (0/25)$ $a_A = 4 - \pi(1)^2 = 4 - \pi \quad (0/25)$ $P(A) = \frac{a_A}{a_s} \quad (0/25) = \frac{4 - \pi}{4} \quad (0/25)$  <p>رسم مربع در دستگاه محورهای مختصات (۰/۲۵) ناحیه‌ی سایه زده شده (۰/۲۵)</p>	۱/۵
۱۷	<p>ص ۱۱۴ و ۱۱۵ و ۱۲۱</p> <p>الف) <math>P(B) = 1 - p(B') \quad (0/25) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \quad (0/25)</math></p> $P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (0/25) = \frac{2}{5} + \frac{4}{7} - \frac{1}{5} = \frac{27}{35} \quad (0/25)$ <p>ب) <math>p(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (0/25) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \quad (0/25) = \frac{1}{5}</math></p>	۱/۵
۲۰	جمع نمره « موفق باشید »	

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.